Moduli, Grobner basis, and computational criterion (Local and global study of singularity theory of differentiable maps)

数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 104-111

Moduli, Gröbner basis, and computational criterion

埼玉大学理工学研究科　神戸　祐太

2017 年 11 月

概要

グレブナー基底は近年の計算機の性能向上によって様々な理論の検証やその応用などに用いられるようになった．グレブナー基底の計算やその理論の幾何学的解釈は興味深い．なぜなら，もしそこになにかしら有意な幾何学が見いだされれば，より効率的な計算理論や直接的な幾何学への応用がありうるからである．幾何学的理解の糸口の一つとして，与えられた単項式イデアルをイニシャルイデアルとしてもつ被約グレブナー基底のモジュライ問題が考えられる．本稿ではそのモジュライ問題の概説として，素朴な考察から自然にそのようなモジュライ問題を導き，数学的な定式化や研究背景を述べ，計算可能性や特異性などに関して知られている結果を紹介する．

1　イントロダクション

まずは平面代数曲線に関して，厳密ではないが次のような考察をいくつかしよう．これらの考察は実際に著者が現在のモジュライ問題に取り組むきっかけになったもので，勉強したばかりのグレブナー基底を幾何学的に理解しようと模索していたときに出会ったものである．後で紹介するように，これらの考察は Bayer[Bay82](Theorem 2.1) によって代数幾何的に定式化されている．

Example 1.1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上で典型的なカスプを定める代数方程式

$$f = x^3 - y^2 = 0$$

を考える．f は 3 次の多項式である．なぜなら，0 でない係数を持つ項 x^3 が一番次数の大きい項であるからである．そこで，x^3 でない残りの項 $-y^2$ に 0 でない実数 $t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ をかけて，

$$f_t = x^3 - ty^2$$

なる 1 パラメーターの多項式族 $\{f_t \mid t \in \mathbb{R}^*\}$ を作ると，各 f_t においても最大次数の項は x^3 であり，$t \to 0$ としたときの極限をとると一番次数の大きい項 x^3 だけが残ってくれる．つまり，感覚的には f を少しずつ変化させていった極限として f の次数の情報をとりだすことができそうである．ところで，我々は今幾何学的には何をしたのだろうか？

後付けではあるが，族 $\{f_t \mid t \in \mathbb{R}^*\}$ は座標変換 $x \mapsto t^{-1}x,\ y \mapsto t^{-1}y$ が定める $\mathbb{R}^*$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $\Phi = \Phi_{(1,1)} : \mathbb{R}^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ に関する $f = 0$ の変形族から得られる（図 1 参照）．すなわち，X_t を $f_t = 0$ が定める代数多様体（零点集合）とすると，$X_t = \Phi(t)(X_1)$ である．ゆえに X_t はすべて代数多様体として同型である．

この変形の $t \to 0$ としたときの極限が $X_0 : x^3 = 0$ である．これは単項式による代数方程式となる．直観的にも X_0 は $X_1 : x^3 - y^2 = 0$ と同型ではなく，実際 y^2 の項が消えた分様々な情報が失われている．すなわち，退化している．また $x^3 = 0$ は零点集合としては単なる y 軸となり非特異であるが，代数方程式としては（つまりスキームとしては）y 軸が 3 重に重なった特異点をもつスキー

ムを定める. $t \neq 0$ のとき各 f_t は既約多項式であるから, とくに X_t は同じ（既約）曲線の重なりとしてはあらわせない. このように, スキーム論の文脈でも $X_0 : x^3 = 0$ は $X_1 : f = 0$ とは全く様相が異なるものになっており, この変形はその極限で急激に退化しているように感じる. しかし, **次元や次数は変化していない**ことに注意する.

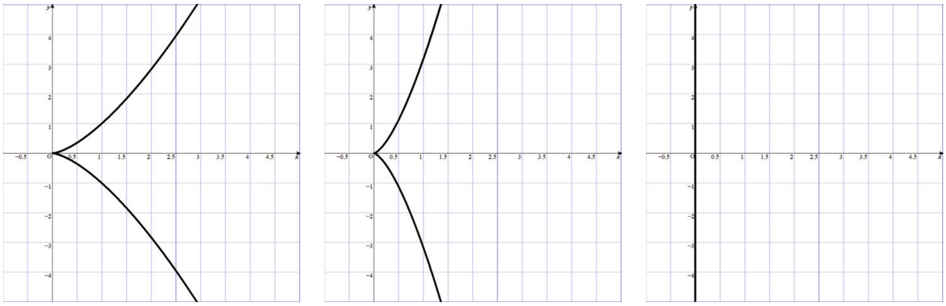

図 1: $t = 1,\ 1/10,\ t \to 0$

一方で, 2 変数の単項式全体には次数つき辞書式順序 **(graded lexicographic order)** とよばれる全順序 $\prec_{grlex}$ が定まる. すなわち, $x^a y^b \prec_{grlex} x^c y^d$ を $a + b < c + d$ または $(a + b = c + d$ かつ $a < c)$ と定めるとこれは単項式全体の集合に全順序を定める. x^3 とはまさしく次数つき辞書式順序に関する f における最大の項である. このことを $\mathrm{in}_{\prec_{grlex}}(f) = x^3$ であらわすことにする. この $\mathrm{in}_{\prec_{grlex}}(f)$ を f の $\prec_{grlex}$ に関する**先頭単項式**という. すると上記より

$$\mathrm{in}_{\prec_{grlex}}(f) = \lim_{t \to 0}(f_t) = x^3$$

がなりたっている. こうして当初の思惑通り, ある種の変形の極限として f の $\prec_{grlex}$ に関する先頭単項式をあらわすことができた.

Hilbert は次数付き辞書式順序による先頭単項式について,「先頭単項式で割り切れない次数 d の単項式の個数」（つまり先頭単項式による剰余環の Hilbert 関数の d での値）の d に関する増加率によって与えられた代数多様体やスキームの次元と次数が表現できることを見出した [CLO97]. つまり, Example 1.1 において退化した極限 X_0 が X_1 と同じ次元や次数をもっているのは Hilbert による確かな理論的背景があるからである. 今日ではこの Hilbert のアイデアはより一般化され, **単項式順序に関する先頭単項式が与えられた代数多様体やスキームの情報を一部決定する**ことがわかっている. このようないわゆるグレブナー基底の代表的な教科書として, [CLO97] や [Eis95] が挙げられる.

次数付き辞書式順序や次に紹介する辞書式順序は単項式順序の典型例である.

Example 1.2. 同じくカスプ $f = x^3 - y^2 = 0$ に対して, 今度は $x \prec y$ なる辞書式順序 **(lexicographic order)** に関して先頭単項式を考えてみる. ここで $x \prec y$ なる辞書式順序とは, $x^a y^b \prec x^c y^d$ を $b < d$ または $(b = d$ かつ $a < c)$ で定めてできる単項式全体の集合上の全順序 $\prec$ のことである.

すると, $\prec$ に関して f で一番大きい項は $-y^2$ である. 先頭単項式を考えるときは係数を無視することにして,

$$\mathrm{in}_{\prec}(f) = y^2$$

とする. 次数付き辞書式順序のときと同様に. この先頭多項式を f の $\mathbb{R}^*$ の作用による変形の極限としてあらわせるだろうか？

とりあえず Example 1.1 と同様にして, 残りの項に t をかけて族

$$\{g_t = tx^3 - y^2 \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

を作ってみる. すると, この族 $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}^*\}$ は $x \mapsto t^{-1}x,\ y \mapsto t^{-2}y$ で定まる $\mathbb{R}^*$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $\Phi = \Phi_{(1,2)} : \mathbb{R}^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ に関する $f = 0$ の変形を定めており, その $t \to 0$ としたときの極限は $\mathrm{in}_{\prec}(f) = y^2 = 0$ である（図 2）.

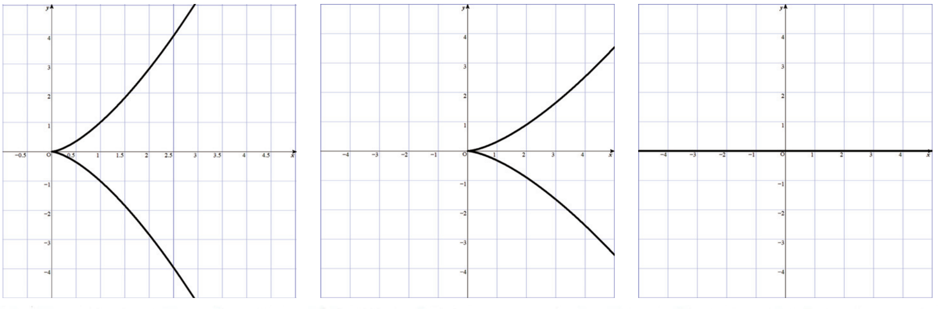

図 2: $t = 1,\ 1/10,\ t \to 0$

この場合の極限は x 軸が 2 重に交わっており, 次元は変化していないが次数は変化している. これは考えている順序が次数付きでないことに由来している. ここで単項式の順序 $\prec$ が次数付きであるとは, $\deg x^{\alpha} > \deg x^{\beta}$ ならば $\alpha \succ \beta$ がなりたつことをいう.

一方で, 楕円曲線

$$h = y^2 - x^3 + x - 1 = 0$$

を考えると, f と同じく先頭単項式は $\mathrm{in}_{\prec}(h) = y^2$ である. また, 作用 $\Phi_{(1,2)}$ にしたがって

$$h_t = y^2 - tx^3 + t^3x - t^4$$

と定めると, この族 $\{h_t \mid t \in \mathbb{R}^*\}$ は $\mathbb{R}^*$ の作用 $\Phi_{(1,2)}$ による $h = 0$ の変形族を与える. 各 $t \in \mathbb{R}^*$ に対して, $h_t = 0$ は $h = 0$ と同型であるが, $t \to 0$ としたときの極限は $f = 0$ と同じく $y^2 = 0$ である（図 3）.

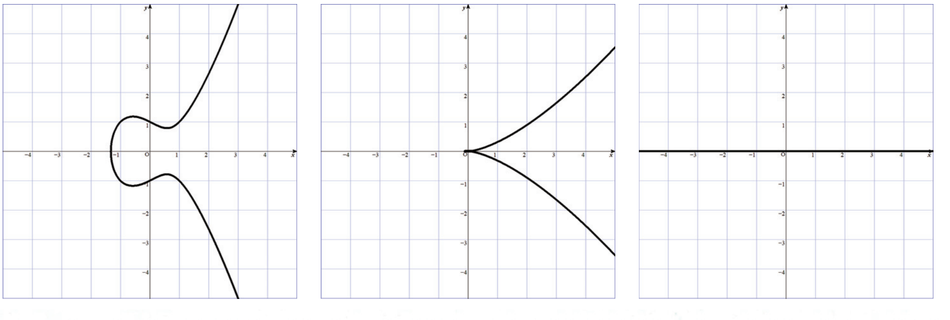

図 3: $t = 1,\ 1/10,\ t \to 0$

このように, 元々の曲線が楕円曲線のように非特異でかつ非常に性質の良いスキームであっても, この種の変形の極限, つまり先頭単項式が定めるスキームは多くの場合スキームとしては特異点をもち, 微分幾何学的なデータも代数幾何学的なデータも大きく変化する. 加えて, カスプのような特異点をもつ曲線と極限を共有する場合があることもわかる. しかし, グレブナー基底理論より, 極限をとっても少なくとも次元は変化しないうえに, 目には見えづらい様々な環論的性質も変化していないことがわかるので, この種の変形は極限においてどうしようもなく退化しているわけではなさそうである.

これらの考察から次の問題に興味がでてくる.

Question 1. 逆に, 与えられた単項式順序 $\prec$ と単項式 $x^a y^b$ について, $x^a y^b$ が定めるスキームに上のような変形で退化するような平面代数曲線はどのようなものがあるだろうか？

しかしながら, この問題はそのままでは簡単すぎる. まず, 2 変数の場合の単項式順序は実質的に辞書式順序と次数付き辞書式順序, および次数付き逆辞書式順序とよばれる 3 タイプしかない. 次に, この問題は単に先頭単項式が $x^a y^b$ である多項式が定める平面代数曲線が答えである.

次のセクションでは問題をより代数学的に一般化することで, 複雑化を図り主問題となるモジュライ問題を導く.

2 イニシャルイデアルとグレブナー変形

体 k 上の n 変数多項式環 $S = k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ において, 連立代数方程式

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = f_r(x_1, \dots, x_r) = 0$$

を考える. よく知られているように, 連立代数方程式を考えるとき注意せねばならないのは, 単にこの連立代数方程式を零点集合として集合論的に考えてしまうと多くの情報が失われてしまうことである. 例えば $k = \mathbb{R}$ のとき, この連立代数方程式の零点集合は

$$f_1^2 + \cdots f_r^2 = 0$$

という単一の代数方程式の零点集合と集合としては同じである. しかし, 後で見るように, $g = f_1^2 + \cdots + f_r^2$ はどのような単項式順序に対しても常にイデアル $\langle g \rangle$ のグレブナー基底であり, Example 1.1 のような退化を考えても Question 1 と同じ理由で面白くない. これを回避する方法は様々だと思うが, 我々の問題においては代数学と親和性が高いスキーム論を採用する. スキーム論に期待できることは, 代数方程式自体を（またイデアルや可換環自体を）そのまま**アフィンスキーム**として扱うことで, 代数学的情報を残したまま幾何学的に考えられることである.

スキーム論に関しては主に [Har77] を参照する. また, 本稿では簡単のためにスキームといえばすべて k 上有限型のアフィンスキームだけを考えることにしよう. そのようなスキームはある有限個の変数をもつ k 上の多項式環のイデアル I と 1 対 1 に対応する. 連立代数方程式 $f_1 = \cdots = f_r = 0$ を考えることは $f_1, \dots, f_r$ によって S において生成されるイデアル

$$I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset S$$

が定めるアフィン空間（k^n のスキーム論的表現）$\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ の閉部分スキーム $\operatorname{Spec} S/I$ を考えることと同じである.

先頭単項式の考えもイデアル化する.

Definition 2.1. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ という表記で n 変数の単項式全体の集合と n 次元の自然数ベクトル全体の集合 $\mathbb{N}^n$ を同一視する. $\mathbb{N}^n$ の全順序 $\prec$ が**単項式順序**であるとは,

$$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n \quad \alpha\prec\beta\Rightarrow\alpha+\gamma\prec\beta+\gamma.$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\} \quad 0\prec\alpha.$$

の二つの条件がなりたつことをいう.

Definition 2.2. n 変数の単項式順序 $\prec$ と多項式環 S について, S のイデアル I の**イニシャルイデアル**とは, I の元の先頭単項式全体が生成するイデアル

$$\mathrm{in}_\prec(I) = \langle \mathrm{in}_\prec(f) \mid f\in I\setminus\{0\}\rangle$$

のことをいう.

このようにイニシャルイデアルを定義すると, Example 1.1 や Example 1.2 の考察であらわれたような $\mathbb{R}^*$ 作用が与えるイニシャルイデアルへの退化が代数幾何的にも存在する.

Theorem 2.1. ([Bay82]) 多項式環 S において, 単項式順序 $\prec$ とイデアル I を与える. このとき, 正の成分をもつ自然数ベクトル $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\mathbb{N}^n$ による重み関数 $\omega:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ が存在して次がなりたつ:
積による群 $k^* = k\setminus\{0\}$ の多項式環 S への作用 $\Phi=\Phi_\omega : k^*\to\mathrm{Aut}(S)$ を $\Phi(t)(x_i) = t^{-\omega_i}x_i$ で定める. このとき, ある $\mathbb{A}_k^n\times_k\mathbb{A}_k^1$ の閉部分スキーム X が存在して,

- 射影 $\pi : X\to\mathbb{A}_k^1$ は平坦.
- $t\in k^*\subset\mathbb{A}_k^1$ でのファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)\subset\mathbb{A}_k^n\times_k\{t\}\cong\mathbb{A}_k^n$ は $I_t = \Phi(t)(I)$ が定める閉部分スキーム $\mathrm{Spec}\, S/I_t$（したがって I が定めるアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, S/I$ と同型）.
- $0\in k\subset\mathbb{A}_k^1$ でのファイバー $X_0 = \pi^{-1}(0)\subset\mathbb{A}_k^n$ は $\mathrm{in}_\prec(I)$ が定める閉部分スキーム $\mathrm{Spec}\, S/\mathrm{in}_\prec(I)$.

このイニシャルイデアルへの平坦変形を**グレブナー変形**, あるいは**グレブナー退化**とよぶ. Question 1 は次の形に一般化できる.

Question 2. 与えられた単項式イデアル J と単項式順序 $\prec$ について, $\mathrm{in}_\prec(I) = J$ となるイデアル全体の集合

$$\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J} = \{I\subset S \mid I \text{ はイデアルかつ } \mathrm{in}_\prec(I) = J\}$$

はどのような集合か？

ここで単項式イデアルとは単項式の集合で生成できるイデアルのことをいう. イニシャルイデアルは定義より単項式イデアルである. 事実として, **被約グレブナー基底**は与えらえた単項式順序に関して各イデアルについて唯一つ存在する. したがって,

$$\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J} = \{G\subset S \mid G \text{ は被約グレブナー基底かつ } \langle\mathrm{in}_\prec(G)\rangle = J\}$$

と定義しても同じである. 後者の定義は有限個の多項式に関する条件として記述できるため, 後述する $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ のスキーム構造を具体的に調べたり計算する際に役立つ. 一方, 前者の定義は幾何学的なモジュライ問題として考える際に有効である.

Question 2 の $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ は**グレブナー（基底）スキーム**, または **Gröbner strata**, ***J*-marked scheme** とよばれる. $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ は集合としてはすぐに決定されるが, モジュライ問題として次に考えたいのは（自然な）幾何学的構造が $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ に存在するかである. 名前からもわかる通り, $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ には自然にスキーム（k 上有限型のアフィンスキーム）の構造が入る. 次のセクションではそのことを紹介する.

3 グレブナースキームとその特異性, 計算可能性

Robbiano は J が 0 次元の単項式イデアルのときに $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ にスキーム構造を入れられることを示した [Rob09]. Robbiano の証明は与えられた多項式の有限集合 $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ が被約グレブナー基底になる条件を $g_1, \ldots, g_r$ の係数の間の代数的な関係式として具体的に記述することによる方法である. また Robbiano はより広く, J が定めるボーダー基底のモジュライ空間をスキームとして構成した.

また, 次の特異性に関する定理を示している.

Theorem 3.1. ([Rob09]) 次は同値である.

- $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ は J に対応する点で非特異.
- $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ はあるアフィン空間と同型.

Roggero と Terracini は一般の単項式イデアル J に対しても, $\prec$ が次数付きであれば $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ がスキーム構造をもつことを示した [RT10]. Roggero と Terracini の手法は Robbiano とはアイデアが少し異なり, 多項式の有限集合 G の係数を不定元としたまま, Buchberger の判定法を用いる方法である. もちろん本質的には Robbiano と同じ条件が現れるが, Roggero と Terracini の手法はよく知られた Buchberger の判定法を組み合わせたものなのでわかりやすい. また, 個別の J に対しては Buchberger アルゴリズムを行うだけで $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ のあるアフィン空間への閉埋め込みと定義イデアルを計算できる.

Lella と Roggero は [LR11] において, [RT10] の内容をさらに進め, グレブナースキームの定義イデアルの被約グレブナー基底計算について大雑把に次のことを示した:

- $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ の J に対応した点での Zariski 接空間を T_J とおく.
- $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ のあるアフィン空間 $\mathbb{A}_k^M = \operatorname{Spec} k[c_1, \ldots, c_M]$ への埋め込みとその定義イデアル $\mathcal{A}$ について, T_J 上の線形代数から変数の集合 C の部分集合で eliminable variables とよばれるもの C' が決定される.
- C' に関する消去順序に関する $\mathcal{A}$ の被約グレブナー基底によって, $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ は $\operatorname{Spec} k[C \setminus C']$ へ定義イデアルが $\langle C \setminus C' \rangle^2$ に含まれるように埋め込める.

とくに Theorem 3.1 が一般の単項式イデアル J と次数付き単項式順序 $\prec$ についてもなりたつことがわかる.

Lederer は Robbiano の与えた条件式をさらに精密化させ, 組み合わせ論的に表現した [Led11]. そのことを説明するために, 次の standard set を定義する.

Definition 3.1. $\mathbb{N}^n$ の部分集合 Δ が **standard set** であるとは,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \quad \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha, \beta \in \Delta$$

がなりたつことをいう. これは Δ の補集合に関して,

$$(\mathbb{N}^n \setminus \Delta) + \mathbb{N}^n \subset (\mathbb{N}^n \setminus \Delta)$$

がなりたつことと同値である.

Proposition 3.1. n 変数多項式環の単項式イデアル全体と $\mathbb{N}^n$ の standard set 全体は,

$$J \mapsto \{\beta \in \mathbb{N}^n \mid x^\beta \notin J\}$$

$$\Delta \mapsto \langle x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \Delta \rangle$$

によって 1 対 1 に対応する.

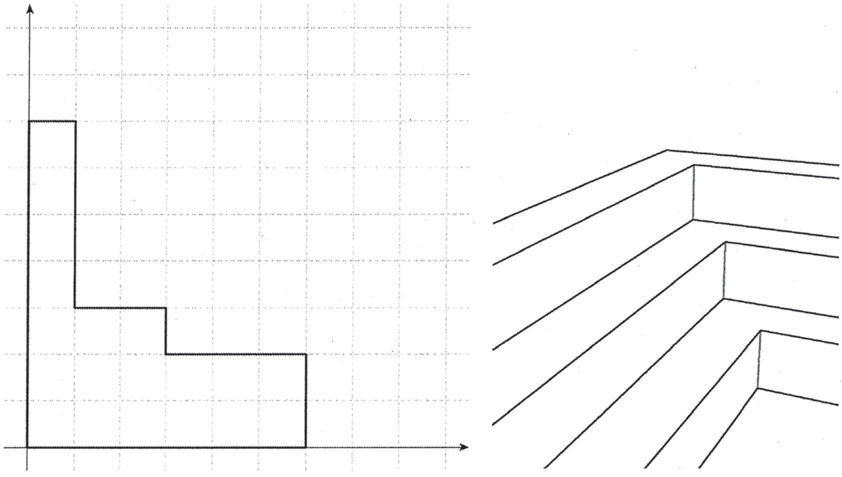

図 4: Standard set

standard set はその公理から図 4 のように, ブロック状の領域を定めている. Lederer はこのような図から standard set 上の特徴的な点（corner や edge point, border などとよばれる点）を定式化し, それらを用いてグレブナースキームの定義イデアルを表現した.

神戸は主に [Rob09, Led11, RT10, LR11] をもとに, 次の計算可能性に関する結果を得た [Kam17].

- 一般の単項式イデアル J と一般の単項式順序 $\prec$ について, $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ は **ind-scheme** とよばれる, アフィンスキームの拡大列の帰納極限であることを示した.

- 一般の standard set Δ に対して, Δ の edge point を corner から計算するアルゴリズムを得た. これによって, $\mathrm{G}_{S/k}^{\prec J}$ がスキームになるとき, そのアフィン空間への埋め込みと定義イデアルを J に対応する standard set から計算するアルゴリズムを考案し, Risa/Asir を用いて実装した.

このように, グレブナースキーム自体の構成や計算に関してはとてもよくわかっているといえよう. またヒルベルトスキームのような他のモジュライ空間への関係なども興味深い. 例えば上記の [Led11, RT10, LR11] や, [Kam18] ではグレブナースキームとヒルベルトスキームがとても密接に関連していることを示す研究結果が報告されている. このことは Hilbert のアイデアを鑑みるに自然なことであるように思える. 今後もグレブナースキームとヒルベルトスキームの理論は表裏一体の存在として発展していくと思われる.

一方, グレブナースキームの幾何学などから新たなグレブナー基底計算アルゴリズムの発見することや, 計算自体の幾何学的解釈を調べる研究については未だ文献がない状態であると思われる. そもそもそのような研究が可能であるのかもよくわかっていないが, 実現できれば様々な応用が見込まれると思うので積極的に取り組んでいきたい課題である.

参考文献

[Bay82] David Allen Bayer. *The Division Algorithm and the Hilbert Scheme.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1982. Thesis (Ph.D.)–Harvard University.

[CLO97] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Kam17] Yuta Kambe. Construction of the moduli space of reduced Gröbner bases. in preparation(arXiv:1707.06448), 2017.

[Kam18] Yuta Kambe. Gröbner scheme in the hilbert scheme and complete intersection monomial ideals. in preparation(arXiv:1709.00701), 2018.

[Led11] Mathias Lederer. Gröbner strata in the Hilbert scheme of points. *J. Commut. Algebra*, 3(3):349–404, 2011.

[LR11] Paolo Lella and Margherita Roggero. Rational components of Hilbert schemes. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 126:11–45, 2011.

[Rob09] L. Robbiano. On border basis and Gröbner basis schemes. *Collect. Math.*, 60(1):11–25, 2009.

[RT10] Margherita Roggero and Lea Terracini. Ideals with an assigned initial ideals. *Int. Math. Forum*, 5(53-56):2731–2750, 2010.